Εισαγωγή στη Μαθηματική Φυσική — 04/10/2016

Σελίδα: Ύλη, Σημειώσεις, Θέματα
Ασκήσεις (+1 μονάδα)

users.uoi.gr/mxenos

Βιβλίο: Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής, Βεργαδος, Παν. Εκδ. Κρήτης

Επικοινωνία: Μιχάλης Ξένος 313δ
mxenos@cc.uoi.gr

1) Γραμμικοί Διανυσματικοί Χώροι
2) Διανυσματικοί χώροι Απείρης Διάστασης
3) Θεωρία Τελεστών
4) Συστήματα Sturm-Liouville
5) Ειδικές Συναρτήσεις Γάμμα-Βήτα
6) Εφαρμογές της Μαθηματικής Φυσικής
7) Ορθογώνια πολυώνυμα (Legendre/Hermite), συναρτήσεις Bessel.

ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Συμβολισμοί: Γνωρίζουμε ότι:

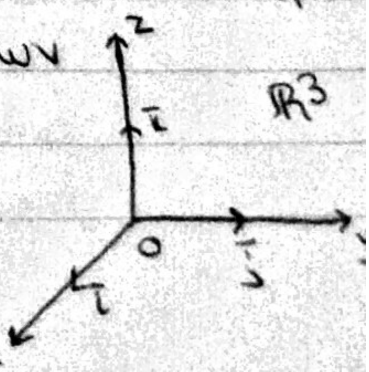
i) Αν $\bar{a}$ διάνυσμα, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τότε και το $\lambda\bar{a}$ είναι διάνυσμα ίδιας ($\lambda>0$) ή αντίθετης ($\lambda<0$) φοράς

ii) Αν $\bar{a}, \bar{b}$ διανύσματα, τότε και $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b}$ (δηλαδή ο γραμμικός τους συνδυασμός) είναι διάνυσμα

iii) Υπάρχει διάνυσμα $\bar{0}$ τέτοιο ώστε $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$

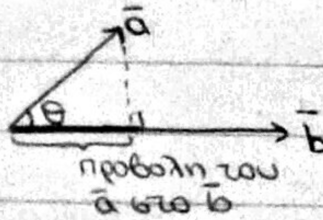
iv) Για κάθε $\bar{a}$ υπάρχει $\bar{b}$ τέτοιο ώστε $\bar{a} + \bar{b} = \bar{0} \Rightarrow \bar{b} = -\bar{a}$

v) Για τον $\mathbb{R}^3$ χρειαζόμαστε $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ώστε κάθε διάνυσμα $\bar{a}$ να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των
$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$.
Τα $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ διανύσματα συγκροτούν βάση



vi) Συμβολίζουμε το μήκος διανύσματος $\bar{a}$ ως $\|\bar{a}\|$ ή $|\bar{a}|$ και αν το $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ τότε $\|\bar{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

vii) Εφοδιάζουμε τα διανύσματα με μια πράξη που ονομάζεται <u>εσωτερικό γινόμενο</u>. Έστω $\bar{a}, \bar{b}$ δύο διανύσματα, τότε $\bar{a}\cdot\bar{b} = \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\cdot\cos\theta$, όπου θ: η μεταξύ τους γωνία



Το εσωτερικό γινόμενο αντιστοιχεί στην προβολή του $\bar{a}$ στο $\bar{b}$

- Αν $\cos\theta = 0$, $\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\| \neq 0$ τότε $\theta = \pi/2$ και τα $\bar{a}, \bar{b}$ είναι κάθετα.

! Τα διανύσματα βάσης $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \delta_{ij} = \text{δέλτα Kronecker}$$

<u>Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου</u>

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$

2) $\bar{c}(\lambda\bar{a} + \kappa\bar{b}) = \lambda\bar{c}\cdot\bar{a} + \kappa\bar{c}\cdot\bar{b}$

3) Αν $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ τότε

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ και

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

<u>Μη Ευκλείδειοι Χώροι</u>

<u>Ειδική Θεωρία Σχετικότητας</u>

t(sec), c ταχύτητα φωτος (m/sec) αρα ct = m/sec·sec = m θέλω να είναι χωρική διάσταση

Ορίζουμε τον 4-διάστατο χώρο (x, y, z, ct). t είναι ο χρόνος και c: η ταχύτητα του φωτός.

Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο: $\underset{\sim}{p}\cdot\underset{\sim}{p}' = ctt' - (xx' + yy' + zz')$

και άρα $\underset{\sim}{p}^2 = ct^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$

δηλαδή το μέτρο ενός διανύσματος $\underset{\sim}{p}$ μπορεί να είναι 0 όταν το $\underset{\sim}{p} \neq \underset{\sim}{0}$. Επίσης το $\underset{\sim}{p}^2 < 0$, δηλαδή το μέτρο του $\underset{\sim}{p}$

θα μπορούσε να είναι και αρνητικό.

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΔΙΑΝ. ΧΩΡΩΝ (διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο)

Συμβολισμός: $\bar{a} = |a\rangle$, που αργότερα θα δούμε ότι μπορεί να ορίσει την κατάσταση ενός σωματιδίου.

έστω S δ.χ

Τότε κάθε διαν. χώρος χαρακτηρίζεται από τις ιδιότητες:

1) Κλειστότητα της πρόσθεσης:
$|a\rangle \in S$, $|b\rangle \in S$ τότε $(|a\rangle + |b\rangle) \in S$

2) Ο διανυσματικός χώρος S είναι κλειστός ως προς τον πολλαπλασιασμό με αριθμό δηλαδή:
$|a\rangle \in S$, $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε $\lambda \cdot |a\rangle \in S$

3) <u>Μηδενικό στοιχείο</u>: $|0\rangle \equiv 0$ και $|a\rangle \in S \Rightarrow |a\rangle + 0 = |a\rangle$

4) <u>Ύπαρξη αντιθέτου</u>: $\forall\, |a\rangle \in S$, $\exists\, |a'\rangle \in S : |a\rangle + |a'\rangle = 0$
ή $|a'\rangle = -|a\rangle$

5) <u>Ιδιότητες πρόσθεσης</u>: (α) $|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$
(β) $|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

6) <u>Ιδιότητες πολ/σμού διανυσμάτων με αριθμούς</u>
(α) $1 \cdot |a\rangle = |a\rangle$
(β) $\lambda(\kappa |a\rangle) = \kappa(\lambda |a\rangle) = (\kappa\lambda) \cdot |a\rangle$
(γ) $(\kappa + \lambda) \cdot |a\rangle = \kappa \cdot |a\rangle + \lambda \cdot |a\rangle$
(δ) $\lambda(|a\rangle + |b\rangle) = \lambda \cdot |a\rangle + \lambda |b\rangle$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι:

1) Το μηδενικό στοιχείο είναι μονοσήμαντα ορισμένο (μοναδικό)

2) Όμοια και για το αντίθετο διάνυσμα. Αντίθετο του $|a\rangle$ είναι το $-|a\rangle$

3) $0 \cdot |a\rangle = 0$ και επίσης $\lambda \cdot |0\rangle = |0\rangle$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$

Εσωτερικό γινόμενο: Θα συνδέσουμε έναν αριθμό (μιγαδικό) με δύο διανύσματα. Ορίζουμε το bra $\langle b|$ και το ket $|a\rangle$ ώστε το εσωτερικό γινόμενο να είναι το braket $\langle b|a\rangle$ → ουσιαστικά είναι το $b \cdot a$
$\langle b||a\rangle = \langle b|a\rangle$ Προσοχή στη σειρά. όχι όπως πριν.

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου

1) $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$ → με το αστεράκι δηλώνω τον συζυγή μιγαδικό

Παρατήρηση!! Αν $|b\rangle \equiv |a\rangle$ τότε $\langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle^* \in \mathbb{R}$

! Γενικά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ως προς τη σειρά. Αν $\langle a|b\rangle^* = \langle a|b\rangle$ τα εσωτερικά γινόμενα λέγονται συμμετρικά

2) Αν $|c\rangle = \lambda|a\rangle + \kappa|b\rangle$ τότε το εσωτερικό γινόμενο $\langle d|c\rangle = \lambda\langle d|a\rangle + \kappa\langle d|b\rangle$

3) $\langle a|a\rangle \geq 0$ για την ισότητα $|a\rangle = |0\rangle = 0$

4) $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$

5) Δύο διανύσματα είναι ορθογώνια αν $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle = 0$

Παράδειγμα

Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Το σύνολο αυτό συγκροτεί διανυσματικό χώρο

1) Αν $f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς στο $[a,b]$ τότε $f(x)+g(x)$ συνεχής

2) $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ τότε $\lambda f(x)$ συνεχής, $\lambda \in \mathbb{R}$

3) Το μηδενικό στοιχείο είναι η μηδενική συνάρτηση

4) Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ τότε υπάρχει $g(x) = -f(x)$ τέτοια ώστε $f(x)+g(x) = f(x)+(-f(x)) = 0$

Εσωτερικό γινόμενο

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\langle g|f\rangle = \overbrace{\int_a^b g^*(x) \cdot f(x)\,dx}^{\text{αριθμός για μιγαδικές συναρτήσεις}} \overset{\text{το "=" ισχύει για το παραπάνω παράδειγμα}}{=} \int_a^b g(x) f(x)\,dx$ (για το παρόν παράδειγμα)